

L'estimation de la Volatilité d'un Modèle Mathématique Appliqué en Économie par le Mouvement Brownien Fractionnaire

Fabian Todor

Dédié to Prof. Dr. Dumitru Acu a l'occasion de 60ème anniversaire

Résumé

Dans un travail tel que [3], nous avons estimé la variance équivalente à la volatilité, par des polynômes orthogonaux d'Hermite construites sur un processus gaussien AR(1). Si on considère le mouvement brownien fractionnaire tel que dans [1], associé au même modèle, on peut faire l'estimation de la variance, soit la volatilité, dans plusieurs cas choisis dans le mouvement brownien fractionnaire.

2000 Mathematics Subject Classification: 91B72.

Keywords: Stochastic models.

1

Si on considère [3], on a une équation stochastique appliquée en économie telle que:

$$(1) \quad dS \setminus S = \mu dt + \sigma \cdot dB;$$

où $S(t)$ = un actif financier (stock) au temps t , exprimé en mathématique telle qu'une marche au hasard (random walk); μ = le taux de croissance (drift) de $S(t)$; $\sigma(t)$ = la volatilité ou la racine carrée de la variance; $B(t, \omega)$ = le mouvement brownien ordinaire c.-à.-d. une fonction aléatoire

avec des croissances indépendantes $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$ de moyenne zéro et de variance $t_2 - t_1$.

Nous avons estimé la variance par :

$$(2) \quad \sigma^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H_i(f_i)$$

où H_i = le polynôme d'Hermite de degré i ; tandis que f_i = un processus gaussien AR(1). On sait, bien sûr, que les systèmes des polynômes d'Hermite sont associés à la loi normale et que les valeurs numériques selon la formule (2) peuvent être obtenues si on fait une troncature dans cette formule et qu'on estime ensuite le processus f_i , AR(1) par des observations en fonction de temps.

2

Si on considère une période $t \in [0, T]$ longue et un compte de banque ou des obligations $A(t)$, voir [2], pour le temps final $T > 0$, on a les relations suivantes:

$$(3) \quad dA(t) = r_t A(t) dt; A(0) = 1; \text{ et } A(t) = \exp \int_0^t r_s ds$$

où $r_t > 0$ est un processus stochastique satisfaisant

$$(4) \quad E\left(\int_0^T |r_t| dt\right) < \infty;$$

d'après (1) on a : $\sigma(t) = f(t, Y(t))$ une fonction continue d'un processus stochastique $Y(t)$ satisfaisant l'équation:

$$(5) \quad dY(t) = a(t, Y(t))dt + b(t, Y)dB(t) + c(t, Y(t))dB_H(t);$$

où $B_H(t)$ est le mouvement brownien fractionnaire défini par les relations suivantes (voir [1]):

$$(6) \quad B_H(t) - B_H(0) =$$

$$= 1/\Gamma(H+1/2) \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right\}$$

pour $H = 1/2$ on a $B(t) = B_{1/2}(t)$; les autres valeurs de H sont $0 < H < 1/2$ et $1/2 < H < 1$.

La quantité $c(t, Y(t))$ est le taux de la consommation satisfaisant la relation :

$$(7) \quad \int_0^T c(t) dt < \infty$$

Un portefeuille, est un processus avec deux dimensions

$$(8) \quad p_t = (\alpha_t, \beta_t)$$

où $0 \leq t \leq T$ et la richesse à l'instant t s'exprime par

$$(9) \quad z_t^p = \alpha_t A(t) + \beta_t S(t).$$

Un tel portefeuille sera avec auto - financement concernant la consommation si on a:

$$dz_t^p = \alpha_t dA(t) + \beta_t dS(t) - c_t dt$$

pour $0 \leq t \leq T$. Si on note par: $\varepsilon_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$ alors le portefeuille sera admissible quand on a:

$$(10) \quad E \left(\int_0^T |\beta_t \sigma(t) \cdot S(t) \varepsilon_t|^2 dt \right) < \infty.$$

3

Il est important que la variance de $B(t)$ sur l'intervalle de dimension T sera: $V^2 = E\{B(t+T) - B(t)\}^2 = T$, la volatilité $V = T^{1/2}$; d'après la définition de $B_H(t)$ dans (6), on a

$$(11) \quad (V_H)^2 = E\{B_H(t+T) - B_H(t)\}^2 = T^{2H} C_H;$$

où la quantité C_H sera donnée par :

$$(12) \quad C_H = [\Gamma(H + 1/2)]^{-2} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}]^2 ds + 1/2H \right\}$$

Alors par (11) et (12) on a la volatilité V_H pour le mouvement brownien fractionnaire, quand $0 < H < 1$. On peut faire l'analyse de la volatilité V_H pour divers processus avec croissances indépendantes associés au mouvement brownien fractionnaire .

References

- [1] B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness, *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*, SIAM Review, Vol.10, No.4, october 1968.
- [2] Y.Hu, *Optimal Consumption and Portfolio In a Market Where The Volatility Is Driven by Fractional Brownian Motion*, Probability, Finance and Insurance Proceedings of a Workshop at the University of Hong Kong, 2004.
- [3] F.Todor, *Sur Des Polynômes Orthogonaux Associés Aux Modèles Mathématiques Appliqués en Pratique*, The 26 th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA) Proceedings, Montreal, 2001.

Montreal University
 C.P. 6128, Montreal QC, H3C 3J7
 E-mail: todor@dms.umontreal.ca