Educaţia Matematică Vol. 1, No. 2 (2005), 71–78

Probleme de combinatorică rezolvate neconvenţional

Amelia Bucur

Abstract

The aim of this paper is studding some combinatorial problems using methods that are less met at classes.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D40

1 Introducere

În cele ce urmează vom utiliza notaţia

$$a(a-h)(a-2h)\cdot\ldots\cdot[a-(n-1)h]=a^{n|h}.$$

Astfel, în particular, $a^{n|0}=a^n, a^{1|h}=a$.

Teorema binomului factorial. *Oricare ar fi două numere reale* a, b *şi* $n\in\mathbb{N}$, *are loc relaţia:*

$$(1)\qquad (a+b)^{n|h}=a^{n|h}+C_n^1a^{n-1|h}b+C_n^2a^{n-2|h}b^{2|h}+\ldots+b^{n|h}$$

Demonstraţie. Teorema se poate demonstra prin metoda inducţiei complete în mod cu totul analog cu demonstraţia obişnuită a formulei binomului lui Newton. Este uşor de verificat că pentru n egal cu 1 sau 2, teorema binomului factorial este adevărată. Presupunem că relaţia din teoremă este adevărată pentru exponentul n, adică are loc (1). Vom demonstra că relaţia (1) este adevărată şi pentru $n+1$. Într-adevăr, înmulţind cu $a+b-nh$

ambii membri ai egalităţii care exprimă teorema pentru exponentul n, în membrul stâng vom obţine evident $(a+b)^{n+1|h}$, în membrul drept, unde figura suma având ca termen de rang i pe $C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}$, vom obţine după înmulţirea cu $a+b-nh$ ca expresie a acestui termen.

$$C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(a+b-nh) = C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}[a-(n-i)h+(b-ih)] =$$
$$= C_n^i a^{n-i|h}[a-(n-i)h]b^{i|h} + C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(b-ih) =$$
$$= C_n^i a^{n-i+1|h} b^{i|h} + C_n^i a^{n-i|h} b^{i+1|h}.$$

Conform relaţiei cunoscute $C_n^{i-1} + C_n^i = C_{n+1}^i$, rezultă, ca şi în cazul teoremei obişnuite a binomului lui Newton, că după înmulţirea membrului întâi cu $a+b-nh$ se va obţine o sumă de termeni de forma $C_{n+1}^i a^{n+1-i|h} b^{i|h}$. Cu acestea, s-a demonstrat că, dacă teorema binomului factorial este adevărată pentru exponentul n, ea este adevărată şi pentru exponentul $n+1$. De aici valabilitatea ei pentru orice n.

2 Aplicaţii ale binomului factorial

Problema 1 *Să se utilizeze teorema binomului factorial la calculul valorilor următoarelor sume:*
a) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0$;
b) $C_m^0 C_n^k - C_{m+1}^1 C_n^{k-1} + C_{m+2}^2 C_n^{k-2} - \ldots + (-1)^k C_{m+k}^k C_n^0$;

Rezolvare:
a) Deoarece

$$C_n^i = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{i!} = \frac{n^{i|1}}{i!},$$

se va obţine

$$C_n^i C_n^{k-i} = \frac{n^{i|1} m^{k-1|1}}{i!(k-i)!} = \frac{1}{k!}\frac{k!}{i!(k-i)!} n^{i|1} m^{k-i|1} \frac{1}{k!} C_k^i n^{i|1} m^{k-i|1}.$$

Deci suma căutată este egală cu

$$\frac{1}{k!}(C_k^0 m^{k|1} + C_k^1 m^{k-1|1} n + C_k^2 m^{k-2|1} n^{2|1} + \ldots + C_k^k n^{k|1}) = \frac{(m+n)^{k|1}}{k!} = C_{m+n}^k.$$

b) Termenul de rang i al sumei poate fi transformat în modul următor:

$$(-1)^i C_{m+i}^i C_n^{k-i} = (-1)^i \frac{(m+i)^{i|1}}{i!} \frac{n^{k-i|1}}{(k-i)!} = \frac{1}{k!} C_k^i (-1)^i (m+i)^{i|1} n^{k-i|1}$$

Dar, după cum este uşor de văzut,

$$(-1)^i (m+i)^{i|1} = (-1)^i (m+i)(m+i-1) \cdot \ldots \cdot (m+1) =$$

$$= (-m-1)(-m-2) \cdot \ldots \cdot (-m-i+1)(-m-i) = (-m-1)^{i|1}$$

Deci,

$$(-1)^i C_{m+i}^i C_n^{k-i} = \frac{1}{k!} C_k^i (-m-i)^{i|1} n^{k-i|1}.$$

Astfel, suma este egală cu

$$\frac{1}{k!}\{C_k^0 n^{k|1} + C_k^1 n^{k-1|1}(-m-1) + C_k^2 n^{k-2|1}(-m-1)^{2|1} + \ldots + C_k^k (-m-1)^{k|1}\} =$$

$$= \frac{(n-m-1)^{k|1}}{k!} = \frac{(n-m-1)(n-m-2) \cdot \ldots \cdot (n-m-k)}{k!}$$

Pentru $n-m-1 \geq k$ această expresie este evident egală cu C_{n-m-1}^k. Se mai observă că, ţinând seama de egalitatea $C_{m+i}^i = C_{m+i}^m$,putem scrie relaţia obţinută (pentru $n-m-1 \geq k$) sub forma

$$C_m^m C_n^k - C_{m+1}^m C_n^{k-1} + C_{m+2}^m C_n^{k-2} + \ldots + (-1)^k C_{m+k}^m C_n^0 = C_{n-m-1}^k.$$

3 Utilizarea schemei geometrice

Uneori pentru stabilirea relaţiilor dintre coeficienţii binomiali este util să se ţină seama de faptul că C_n^k este egal cu numărul combinărilor de n elemente luate câte k. Pentru a ilustra acest procedeu, este comod să fie folosită următoarea schemă geometrică. Presupunând că ne aflăm într-un oraş ale cărui străzi sunt dispuse după două direcţii perpendiculare (vezi fig.1 unde toate străzile oraşului considerat sunt reprezentate prin drepte orizontale şi verticale), se vor numerota străzile paralele cu $0, 1, 2, 3$ *etc.*, iar intersecţiile prin două "coordonate" (m, n), unde m este numărul străzii "verticale", care trece prin această intersecţie, iar n este numărul străzii "orizontale" (în fig.1 intersecţiile sunt însemnate prin puncte). Se presupune acum că trebuie să trecem de la casa care se află în intersecţia $(0,0)$ la aceea de la intersecţia (m,n). În acest caz, vor exista C_{m+n}^{n} drumuri care sunt cele mai scurte, de lungime egală şi legând cele două case. Într-adevăr, fiecare dintre aceste cele mai scurte drumuri conţine $m+n$ cartiere şi dintre acestea n cartiere sunt "verticale". Aceste n cartiere "verticale" pot fi distribuite printre cele $m+n$ cartiere în C_{m+n}^{n} moduri.

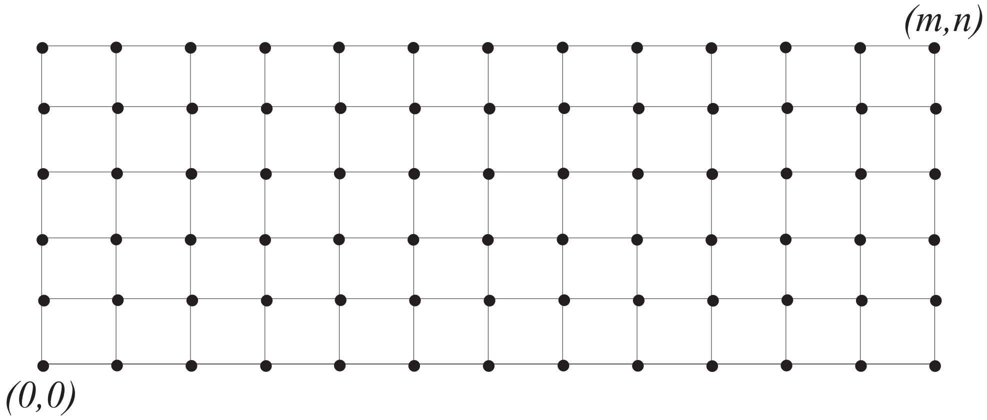

Figura 1

(prin "cartier" se înţelege porţiunea dintr-o stradă, cuprinsă între două străzi cosecutive care o intersectează).

Împărţind mai departe mulţimea celor mai scurte drumuri într-o serie de clase după anumite criterii, se pot, cu ajutorul acestei scheme, obţine unele relaţii interesante între coeficienţii binomiali.

IV. Aplicaţii ale schemei geometrice

Problema 2 *a) Să se utilizeze schema geometrică descrisă pentru demonstrarea relaţiei:*

$$C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} + ... + C_{n-m}^{0} = C_{n+1}^{m};$$

b) Să se demonstreze următoarea generalizare a relaţiei precedente:

$$C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^{1} + C_{n-2}^{m-2} C_{k+2}^{2} + \ldots + C_{n-m}^{0} C_{k+m}^{m} = C_{n+k+1}^{m}$$

c) Să se calculeze suma:

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

Rezolvare: a) Se vor considera cele mai scurte drumuri care duc de la intersecţia $(0,0)$ la intersecţia $(n-m+1,m)$ (fig.2)

Numărul unor astfel de drumuri este evident egal cu C_{n+1}^m. Se împart acum aceste drumuri în următoarele clase fără elemente comune. În primul rând, se poate porni pe strada "orizontală" - astfel de drumuri vor fi tot atâtea câte drumuri unesc intersecţia $(1,0)$ cu intersecţia $(n-m+1,m)$, adică sunt în număr de C_n^m. In al doilea rând, se pot parcurge mai întâi un cartier pe strada "verticală" "si abia în punctul $(0,1)$ să se treacă la dreapta; numărul acestor drumuri este egal cu numărul drumurilor care unesc intersecţia $(1,1)$ cu intersecţia $(n-m+1,m)$adică este egal cu C_{n-1}^{m-1}. În al treilea rând, se poate trece întâi din punctul $(0,0)$ în punctul $(0,2)$ şi de acolo să se ia la dreapta - numărul acestor drumuri este evident egal cu numărul drumurilor care unesc punctele $(1,2)$ şi $(n-m+1,m)$, adică este egal cu C_{n-2}^{m-2}. În al patrulea rând, se pot parcurge mai întâi trei cartiere pe strada "verticală" de rang zero şi de acolo să se treacă la dreapta (în total C_{n-3}^{m-3} drumuri); în al cincilea rând, să se ajungă in punctul $(0,4)$ şi de acolo să se pornească la dreapta (în total C_{n-4}^{m-4} drumuri) etc. Ultima posibilitate este aceea ca mai întâi să se parcurgă "în sus" toate cele m cartiere şi numai de acolo să se treacă la dreapta (un singur drum, $C_{n-m}^0 = 1$). Deoarece numărul total de drumuri este egal cu C_{n+1}^m şi fiecare drum aparţine numai unei singure dintre clasele considerate, de aici rezultă imediat relaţia pe care trebuie să o demonstrăm.

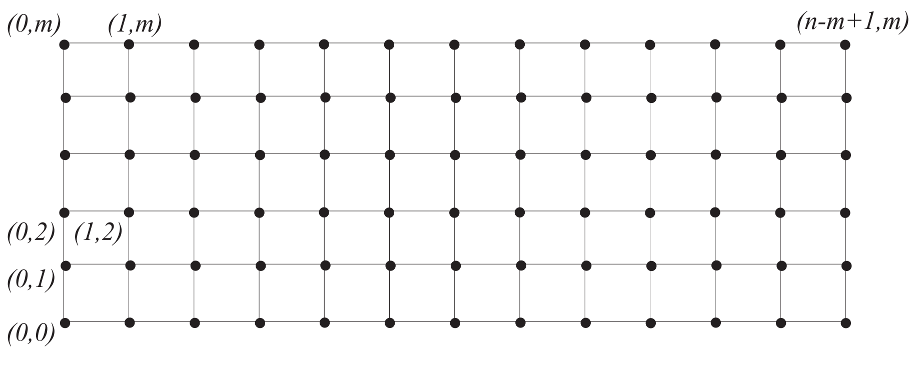

Figura 2

b) Se consideră toate drumurile cele mai scurte, care duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(n-m+k+1,m)$. Numărul unor astfel de drumuri este, evident, egal cu C^m_{n+k+1}. Se împart aceste drumuri în clase fără elemente comune. Pentru aceasta se duce pe harta oraşului o dreaptă verticală, care trece între verticalele de rang k şi $k+1$. Fiecare dintre drumurile considerate va intersecta aceste drumuri într-un singur punct. Numărul drumurilor care intersectează dreapta dată într-un punct situat pe orizontala de rang r este, evident, egal cu produsul dintre numărul drumurilor care unesc punctul $(0,0)$ cu punctul $(n-m+k+1,m)$. Astfel, acest număr este egal cu $C^r_{k+r}C^{m-r}_{n-r}$. Punând în ultima expresie $r=0,1,2,\ldots,m$ şi însumnând toate expresiile obţinute, ne convingem că avem:

$$C^0_kC^m_n + C^1_{k+1}C^{m-1}_{n-1} + C^2_{k+2}C^{m-2}_{n-2} + \ldots + C^m_{k+n}C^0_{n-m} = C^m_{n+k+1},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

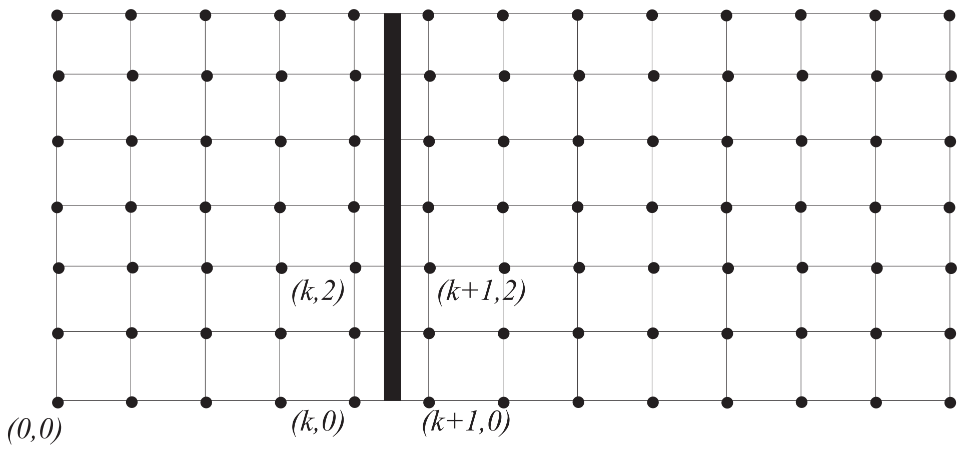

Figura 3

c) Considerăm din nou o schemă geometrică. Numărul $C^k_mC^0_n$ este produsul dintre numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(m-k,k)$ şi numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(m-k,k)$ în punctul $(n+m-k,k)$, adică este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(n+m-k,k)$ şi care trec prin punctul $(m-k+1,k-1)$; $C^{k-2}_mC^2_n$ este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(n+m-k,k)$ şi care trec prin punctul $(m-k+2, k-2)$ etc.; $C_m^0 C_n^k$ este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(n+m-k, k)$ şi care trec prin punctul $(m-k+n, k) = (m, 0)$. Deoarece fiecare dintre cele mai scurte drumuri duc din punctul $(0,0)$ în punctul $(n+m-k, k)$ intersectează într-un singur punct dreapta dusă în fig.4, atunci suma care figurează în problemă este egală cu numărul total al celor mai scurte drumuri care unesc punctele $(0,0)$ şi $(n+m-k, k)$, adică este egal cu C_{n+m}^k.

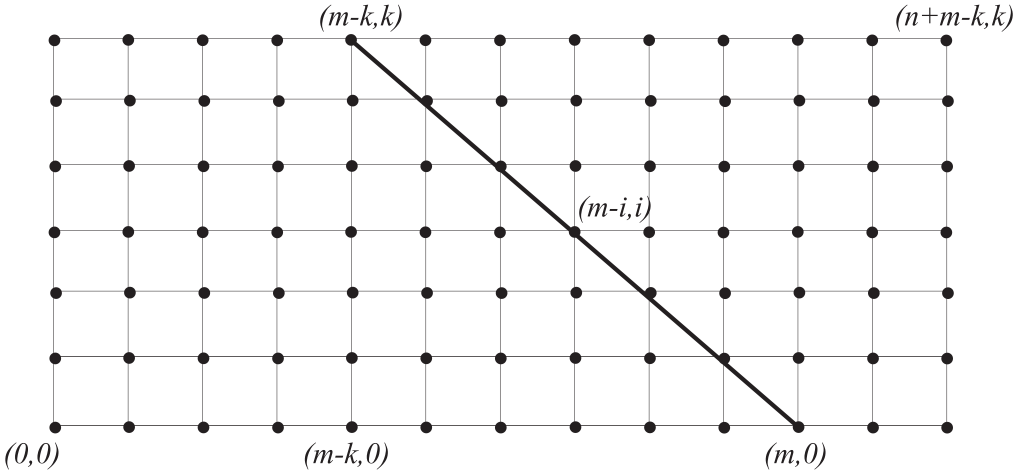

Figura 4

Problema 3 *(din [1])a) La o casă de bilete stau la rând $n+m$ oameni; n dintre ei au monede de câte cinci mii de lei, iar ceilalţi m au numai bancnote de câte zece mii de lei. Biletul costă cinci mii de lei. La începutul vânzării casa nu are bani. Care este probabilitatea ca nici unul din cumpărători să nu fie nevoit să aştepte restul?*

b) Să se rezolve aceeaşi problemă dacă se presupune că la începutul vânzării casa avea p monede de câte cinci mii de lei.

Rezolvare: Se utilizează schema geometrică. A se vedea [1], pag. 198

Bibliografie

[1] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. Tehnică, Bucureşti. 1983

[2] C. Năstăsescu ş.a, *Exerciţii şi probleme de algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

Univ. "Lucian Blaga" din Sibiu
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I.Raţiu, nr.5-7
550212 - Sibiu, Romania
E-mail: *amelia.bucur@ulbsibiu.ro*