Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 2 (2005), 9–12

Generalizări ale unor probleme cu parte întreagă

Dumitru Acu

Abstract

In this note we present the generalizations for four problems concerning the integer part from the book [1].

2000 Mathematical Subject Classification: 97D40

Problemele cu parte întreagă prezintă un interes deosebit în învăţământul matematic deoarece în rezolvarea lor este nevoie deseori de aşa numitele "sclipiri matematice".

În această notă vom prezenta generalizări pentru câteva probleme cu partea întreagă apărute în interesanta carte [1].

1. În [1] la pagina 38 se enunţă problema P18, dată în 1988 la Olimpiada de Matematică din Australia:

"Fie $a_1 < a_2 < ... < a_k$ numere reale şi $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_k}$. Atunci $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + ... = n - k$."

Propunem următoarea generalizare: "Fie $a_1 < a_2 < ... < a_k$ numere reale şi $n_k = b^{a_1} + b^{a_2} + ...b^{a_k}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Atunci

$$\left[\frac{n_k}{b}\right] + \left[\frac{n_k}{b^2}\right] + ... = \frac{n_k - k}{b - 1}.\text{"} \tag{1}$$

Pentru rezolvare folosim inducţia matematică în raport cu k. Pentru $k = 1$ avem $n_1 = b^{a_1}$ şi putem scrie

$$\left[\frac{n_1}{b}\right] + \left[\frac{n_1}{b^2}\right] + ... = b^{a_1-1} + b^{a_1-2} + ... + b + 1 = \frac{b^{a_1} - 1}{b - 1} = \frac{n_1 - 1}{b - 1}.$$

Presupunem egalitatea (1) adevărată pentru k şi să arătăm că ea are loc şi pentru $k+1$. Cum $n_{k+1} = n_k + b^{a_{k+1}}$ cu $n_k < b^{a_{k+1}}$, avem

$$\sum_{t\geq 1}\left[\frac{n_{k+1}}{b^t}\right] = \sum_{t\geq 1}\left[\frac{n_k + b^{a_{k+1}}}{b^t}\right] =$$

$$= \sum_{t\geq 1}\left[\frac{n_k}{b^t}\right] + b^{a_{k+1}-1} + b^{a_{k+1}-2} + ... + b + 1 = \frac{n_k - k}{b-1} + \frac{b^{a_{k+1}} - 1}{b-1} =$$

$$= \frac{n_{k+1} - (k+1)}{b-1},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 1.1. *Pentru $b = 2$ se obţine problema P18 din [1].*

2. În aceaşi carte la pagina 47 se dă problema P46, propusă de D. M. Bătineţu - G.: *"Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia*

$$x = [\sqrt[3]{x}] + 1."$$

Propunem următoarea generalizare: *"Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia*

$$x = (n-1)[\sqrt[n]{x}] + 1." \tag{2}$$

Punem $[\sqrt[n]{x}] = y$ şi din (2) avem $x = (n-1)y + 1$. Cum $y \leq \sqrt[n]{x} < y+1$ rezultă $y^n \leq (n-1)y + 1 < (y+1)^n$. De aici obţinem sistemul de inecuaţii:

$$\begin{cases} y^n - (n-1)y - 1 \leq 0 \\ y^n + ny^{n-1} + Cn^2y^{n-2} + ... + Cn^2y^2 + y > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Prin inducţie matematică în raport cu n se arată că pentru $y \geq 2$ avem $y^n > (n-1)y + 1$. Rezultă că $y^n - (n-1)y - 1 \leq 0$ are loc numai pentru $y = 1$, care verifică şi inecuaţia a doua din (3). Prin urmare, obţinem $x = n$.

Observaţia 2.1. *Pentru $n = 3$ obţinem problema 46 din [1].*

Observaţia 2.2. *Din soluţia problemei rezultă că* $[\sqrt[n]{n}] = 1$

3. La pagina 36 din [1] se dă problema P3, având ca autor pe N. Negulescu: *"Să se arate că*

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + ... + [\sqrt{n^2 - 1}] = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)."$$

Propunem următoarea generalizare: "Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$; arătaţi că pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc egalitatea

$$[\sqrt[k]{1}] + [\sqrt[k]{2}] + ... + [\sqrt[k]{n^k - 1}] = n^{k+1} - (1^k + 2^k + ... + n^k)." \tag{4}$$

Notăm cu $S_{n,k}$ suma din memmbrul stâng al egalităţii (4). Avem succesiv

$$S_{n,k} =$$

$$= \Big([\sqrt[k]{1}] + [\sqrt[k]{2}] + ... + [\sqrt[k]{2^k - 1}] +$$

$$+ \Big([\sqrt[k]{2^k}] + [\sqrt[k]{2^k + 1}] + ... + [\sqrt[k]{3^k} - 1] \Big) + ... +$$

$$+ [\sqrt[k]{(n-1)^k}] + [\sqrt[k]{(n-1)^k + 1}] + ... + [\sqrt[k]{n^k - 1}] \Big) =$$

$$= (2^k - 1) + (3^k - 2^k)2 + (4^k - 3^k)3 + ... + (n^k - (n-1)^k)(n-1) =$$

$$= 1 \cdot 2^k + 2 \cdot 3^k + 3 \cdot 4^k + ... + (n-1)n^k -$$

$$-(1^{k+1} + 2^{k+1} + 3^{k+1} + ... + (n-1)^{k+1}) =$$

$$= (2-1)2^k + (3-1)3^k + ... + (n-1)n^k -$$

$$-(1^{k+1} + 2^{k+1} + 3^{k+1} + ... + (n-1)^{k+1}) =$$

$$= n^{k+1} - (1^k + 2^k + ... + n^k),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 3.1. *Pentru $k = 2$ obţinem problema lui N. Negulescu , iar pentru $k = 3$ avem:*

$$S_{n,3} = \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}.$$

4. La pagina 36 în [1] se dă problema P1: *“Să se demonstreze egalitatea*

$$[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + ...[\sqrt{n(n+1)}] = \frac{n(n+1)}{2}.”$$

Propunem următoarea generalizare: “Fie $p \in \mathbb{N}^*$; au loc egalităţile:

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} [\sqrt{pk(pk+1)}] = p\frac{n(n+1)}{2}$;

ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} [\sqrt{(pk-1)(pk+1)}] = \frac{n(np+p-2)}{2}$.”

La i) ne folosim de dubla inegalitate

$$pk < \sqrt{pk(pk+1)} < pk + 1,$$

valabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci putem scrie

$$\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{pk(pk+1)}] = \sum_{k=1}^{n} pk = p\frac{n(n+1)}{2}.$$

La ii) folosim dubla inegalitate $pk-1 < \sqrt{(pk-1)(pk+1)} < pk$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, şi avem

$$\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{(pk-1)(pk+1)}] = \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(np-p-2)}{2}.$$

Observaţia 4.1. *Pentru $p = 1$ din i) obţinem problema P1 din [1] iar din ii) găsim identitatea*

$$\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{(k-1)(k+1)}] = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Observaţia 4.2. *Pentru $p = 2$ obţinem identităţile:*

$$\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{2k(2k+1)}] = n(n+1)$$

şi

$$\sum_{n=1}^{n}[\sqrt{(2k-1)(2k+1)}] = n^2.$$

Bibliografie

[1] Andrei, Gh., Cucurezeanu, I., Caragea, C., *Probleme de algebră (gimnaziu-liceu)*, Ed. GIL - Zalău, 1996.

Departamentul de Matematică
Facultatea de Ştiinţe
Str. dr. I. Raţiu, nr. 5-7,
550012 - Sibiu, Romania
E-mail: *acu_dumitru@yahoo.com*