Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 95–100

Asupra unor probleme de la Olimpiada Naţională de Matematică 2003

Amelia Bucur

Abstract

In this paper some problems for the Mathematics National Contest April 2003 are generalized and some comments are made upon some of the problems that were proposed for this contest.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D40

Subiectul 3 propus pentru clasa a VIII-a a avut următorul enunţ:

Numerele reale a şi b au proprietăţile:

i) $0 < a < b$;

ii) $b - a \geq \frac{1}{2}$;

iii) $a^{40} + b^{40} = 1$.

Arătaţi că în reprezentarea zecimală a lui b, primele 12 *cifre de după virgulă sunt egale cu* 9.

Soluţia ce a fost prezentată în broşura [3] este:

din $0 < a < b$ şi $a^{40} + b^{40} = 1$ rezultă că $0 < a < b < 1$.

Cum $b - a \geq \frac{1}{2}$, rezultă că $1 - a > \frac{1}{2}$, deci $a < \frac{1}{2}$; $a^{40} < \frac{1}{2^{40}} = \frac{1}{1024^4} < \frac{1}{10^{12}}$.

$a^{40} + b^{40} = 1$ implică $b^{40} + \frac{1}{10^{12}} > 1, b^{40} > 1 - \frac{1}{10^{12}} = \underbrace{0,99...9}_{\text{12 cifre}}$

Cum $0 < b < 1$, rezultă $b > b^{40} > \underbrace{0,99...9.}_{\text{12 cifre}}$

Se constată că această problemă poate fi generalizată sub forma:

Numerele reale a şi b au proprietăţile:

i) $0 < a < b$;

ii) $b \geq a + \frac{1}{\zeta}$ $(0 < \zeta \leq 2)$;

iii) $a^p + b^n = 1$ $(p, n \in \mathbb{N}^*)$.

Arătaţi că în reprezentarea zecimală a lui b, primele cifre de după virgulă sunt egale cu 9.

Soluţie.

Din $0 < a < b$ şi *iii)* rezultă că $0 < a < b < 1$. Condiţia *ii)* implică $a < \frac{1}{\zeta}$; $a^p < \frac{1}{\zeta^p} \leq \frac{1}{10^m}$ $(\zeta^p \geq 10^m, p \lg \zeta \geq m, m = [p \lg \zeta])$.

$a^p + b^n = 1$ implică $b^n > 1 - \frac{1}{10^m} = \underbrace{0,99...9.}_{\text{m cifre}}$

Cum $0 < b < 1$, rezultă $b > b^n > \underbrace{0,99...9.}_{\text{m cifre}}$

O altă chestiune de la Olimpiada Naţională de Matematică ce dorim să o comentăm este problema 3 pentru clasa a XII-a: *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $xf(x) \geq \int\limits_0^x f(t)dt$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

a) Să se arate că funcţia $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dată de $g(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)dt$, este crescătoare pe $(-\infty; 0)$ şi pe $(0; \infty)$ ([3], pag. 11).

Observăm că funcţia g ce intervine în această aplicaţie, este media integrală Cesàro, pe $(0, \infty)$. Iată deci, că această medie integrală Cesàro, atât de studiată de mai mulţi autori, căreia i s-au construit şi generalizări, care are şi variante discrete (cum ar fi operatorul Cesáro ce transformă orice şir într-un şir de medii), rămâne în actualitate.

Consider că problema propusă pentru clasa a XII -a nu este interesantă pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi nici "estetică" din punct de vedere matematic. Mai rar folosim integrale unde limita inferioară este 0 sau pozitivă, iar cea superioară, negativă.

Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă în sens Riemann pe orice interval de forma $[0, x]$ unde $0 \leq x < \infty$. *Media integrală Cesáro* a funcţiei f este, prin definţie, funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt, \qquad 0 < x < \infty$$

$(F = g|_{(0,\infty)})$.

Această denumire este justificată de unele proprietăţi ale funcţiei F, analoage proprietăţilor mediei aritmetice a şirurilor finite de numere reale.

Una din problemele puse referitor la funcţia F este proprietatea de conservare a monotoniei.

Astfel: T. Andreescu [1] evidenţiază proprietatea de conservare a monotoniei prin această transformare în cazul funcţiilor derivabile.

I. Muntean [2] demonstrează următoarea proprietate:

Proprietate. *Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ media integrală Cesáro a lui f. Dacă f este monotonă, atunci F este monotonă şi are acelaşi tip de monotonie cu f.*

Demonstraţie. Fie $x \in (0, \infty)$. Continuitatea lui f asigură existenţa integralei ce figurează în (1).

Aceasta ne îndreptăţeşte să facem schimbarea de variabilă $t = xs$, $s \in [0,1]$ şi

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(xs)xds = \int_0^1 f(xs)ds \tag{2}$$

Presupunem că f este crescătoare. Fie $x, y \in (0, \infty)$ cu $x < y$. Atunci, din $xs \leq ys$, avem $f(xs) \leq f(ys)$, pentru orice s din $[0,1]$, şi deci

$$F(x)\int_0^1 f(xs)ds \leq \int_0^1 f(ys)ds = F(y),$$

adică F este crescătoare.

Analog, se tratează şi celelalte tipuri de monotonie.

Observaţie. Reciproca proprietăţii nu este, în general, adevărată.

Pentru funcţia polinomială

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t,$$

care nu este monotonă pe $[0,\infty)$, avem

$$F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2, \quad x \in (0,\infty),$$

deci F este strict crescătoare.

În continuare, propunem pentru pregătirea lotului olimpic sau pentru a fi lucrate la seminarii cu studenţii, următoarele aplicaţii:

. 1 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(k) = \dfrac{1}{k+1}$, *pentru orice* k *natural. Pentru orice* $i \in \mathbb{N}$ *definim funcţiile* $g^i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *astfel:*

$$g^i(k) = \begin{cases} f(k), \textit{dacă } i = 0 \\ f(k) - f(k+1), \textit{dacă } i = 1, \\ g(g^{i-1}(k)), \textit{dacă } i > 1 \end{cases} \qquad \textit{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că sunt adevărate relaţiile:

$$C_n^k g^{n-k}(k) = f(n), \quad k = \overline{0,n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Indicaţie. Se utilizează metoda inducţiei matematice. Se demonstrează că proprietăţile

$$P(n) : C_n^k g^{n-k}(k) = f(n), \quad k = \overline{0,n}$$

sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. *Fie* $p > 1$. *Un şir* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de numere reale se spune că aparţine mulţimii* l^p, *dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |y_n|^p < \infty$. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şiruri de numere reale strict pozitive din* l^p. *Să se arate că şirul* $\left(\sum\limits_{i=0}^{j} a_i(b_0 + b_1 + ... + b_i)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$, *unde termenul general al şirului* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este definit de relaţia*

$$b_n = \frac{x_n a_n^{p-1}}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^p}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Indicaţie. Se verifică prin calcul direct după definiţie, utilizând inegalitatea triunghiului, faptul că şirul $(\sum\limits_{i=0}^{j} a_i(b_0 + b_1 + ...b_i))_{j\in\mathbb{N}}$ este sumabil la puterea p.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, *Problema nr.18115*, Gazeta Matematică, nr. **1**, 1980.

[2] I. Muntean, *Asupra mediei integrale Cesáro*, Gazeta Matematică, nr. **12**, 1980.

[3] $\star\star\star$, *"Olimpiada Naţională de matematică, ediţia a 54-a", Sibiu, aprilie 2003*, Editura Bârchi, 2003.

Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu

Departamentul de Matematică

Str. Dr. I. Raţiu, nr. 5-7

550012 Sibiu,Romămia

E-mail: *amelia.bucur@ulbsibiu.ro*